

ΜΑΘΗΜΑ 18**1.4 – 1.5 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$** **Κριτήριο παρεμβολής
Βοηθητική συνάρτηση****ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Κριτήριο παρεμβολής****1.**Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$x^2 + 4x \leq f(x) \leq x^3 + x^2 + 4x \quad \text{για κάθε } x \text{ κοντά στο } x_0 = 0$$

Να βρείτε το **i)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ii)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ **Προτεινόμενη λύση****i)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4x) = 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^2 + 4x) = 0^3 + 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ **ii)**Για $x > 0$ και κοντά στο $x_0 = 0$, η υπόθεση γίνεται

$$x + 4 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x^2 + x + 4$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 4) = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 4) = 4$$

$$\text{Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad (1)$$

Για $x < 0$ και κοντά στο $x_0 = 0$, η υπόθεση γίνεται

$$x + 4 \geq \frac{f(x)}{x} \geq x^2 + x + 4$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 4) = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 4) = 4$$

$$\text{Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2) έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

2.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $|xf(x) - |x|| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 0$.

Υπόδειξη. $-x^2 \leq xf(x) - |x| \leq x^2$ και άσκηση 1.

3.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| \leq |x - 3|$ κοντά στο $x_0 = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Υπόδειξη. $-|x - 3| \leq f(x) - 2 \leq |x - 3|$ και άσκηση 1.

4.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $-2x^2 + x + 3 \leq f(x) \leq -6x^2 - 7x - 1$ κοντά στο $x_0 = -1$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1}$

Προτεινόμενη λύση

Παραγοντοποιούμε τα τριώνυμα οπότε η υπόθεση γίνεται

$$(x + 1)(-2x + 3) \leq f(x) \leq (x + 1)(-6x - 1) \quad (1)$$

Για $x + 1 > 0$ και κοντά στο $x_0 = -1$, η (1) $\Rightarrow -2x + 3 \leq \frac{f(x)}{x + 1} \leq -6x - 1$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x + 3) = 2 + 3 = 5$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} (-6x - 1) = 6 - 1 = 5$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x + 1} = 5 \quad (2)$

Για $x + 1 < 0$ και κοντά στο $x_0 = -1$, η (1) $\Rightarrow -2x + 3 \geq \frac{f(x)}{x + 1} \geq -6x - 1$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + 3) = 2 + 3 = 5$ και $\lim_{x \rightarrow -1^-} (-6x - 1) = 6 - 1 = 5$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x + 1} = 5 \quad (3)$

Από τις (2), (3) έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 5$

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες, ώστε $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$

κοντά στο x_0 . Αν επί πλέον είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = 0$, να αποδείξετε

ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $0 \leq f(x) \leq f(x) + g(x)$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

6.

Να βρείτε το όριο της $f(x) = x^v \sin \frac{\pi}{x}$, $v \in \mathbb{N}^*$, στο $x_0 = 0$.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $0 \leq |f(x)| = \left| x^v \sin \frac{\pi}{x} \right| = |x^v| \left| \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x^v| \cdot 1 = |x|^v$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^v = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

7.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $[f(x)]^3 + f(x) = x$ κοντά στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το όριο της f στο $x_0 = 0$.

Λύση

$$[f(x)]^3 + f(x) = x \Rightarrow f(x) [f(x)]^2 + 1 = x$$

$$f(x) = \frac{x}{[f(x)]^2 + 1}$$

$$|f(x)| = \frac{|x|}{[f(x)]^2 + 1}$$

$$0 \leq |f(x)| = \frac{|x|}{[f(x)]^2 + 1} \leq \frac{|x|}{1} = |x|$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

8.

Για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δίνεται ότι $\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu \lambda x \leq x^2$.

Να βρείτε το λ .

Προτεινόμενη λύση

Για $x > 0$ και κοντά στο $x_0 = 0$, η υπόθεση $\Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu \lambda x}{x} \leq x$ **(1)**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu \lambda x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \lambda x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + 2 \lim_{2x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2x} + \lambda \lim_{\lambda x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \lambda x}{\lambda x} \\ &= 1 + 2 \cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 3 + \lambda \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu \lambda x}{x} \right) &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \Rightarrow \\ 3 + \lambda &\leq 0 \quad \lambda \leq -3 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Για $x < 0$ και κοντά στο $x_0 = 0$, η υπόθεση γίνεται

$$\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu \lambda x}{x} \geq x$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\lambda \geq -3$ **(3)**

Από τις (2), (3) έχουμε $\lambda = -3$

Βοηθητική συνάρτηση

9.

Για τη μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow 3} (-2f(x) + x^2 - x) = 0$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3f(x)} - 3}{[f(x)]^2 - 9}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = -2f(x) + x^2 - x$ κοντά στο $x_0 = 3$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 0$ και $2f(x) = -h(x) + x^2 - x$

$$f(x) = -\frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 3} h(x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 3} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3f(x)} - 3}{[f(x)]^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3}\sqrt{f(x)} - 3}{[f(x) - 3][f(x) + 3]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3} [\sqrt{f(x)} - \sqrt{3}]}{[\sqrt{f(x)} - \sqrt{3}] [\sqrt{f(x)} + \sqrt{3}] [f(x) + 3]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3}}{[\sqrt{f(x)} + \sqrt{3}] [f(x) + 3]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{[\sqrt{3} + \sqrt{3}] [3 + 3]} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{1}{12}$$

10.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(2x) - f(-x) \eta \mu 2x}{2x^2 - \eta \mu^2 x}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ κοντά στο $x_0 = 0$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ και $f(x) = x h(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(2x) - f(-x) \eta \mu 2x}{2x^2 - \eta \mu^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x h(2x) - (-x) \cdot h(-x) \eta \mu 2x}{2x^2 - \eta \mu^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 h(2x) + x h(-x) \eta \mu 2x}{2x^2 - \eta \mu^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[2 \cdot h(2x) + h(-x) \frac{\eta \mu 2x}{x} \right]}{x^2 \left[2 - \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right]} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \cdot h(2x) + h(-x) \frac{\eta \mu 2x}{x} \right]}{\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right]} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} h(2u) = 1 \quad (\text{όπου } x \text{ θέσαμε } 2u)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} h(-u) = 1 \quad (\text{όπου } x \text{ θέσαμε } -u)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{2x} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta \mu u}{u} = 2 \cdot 1 = 2 \quad (\text{όπου } 2x \text{ θέσαμε } u)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(2x) - f(-x) \eta \mu 2x}{2x^2 - \eta \mu^2 x} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2 - 1} = 4$$

11.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 4$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4}{x - 2}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x-2}$ κοντά στο $x_0 = 2$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$ και $h(x)(x-2) = f(x) - 1$

$$f(x) = h(x)(x-2) + 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 [h(x)(x-2) + 1] - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 h(x)(x-2) + x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[x^2 h(x) + \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} h(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2^2 \cdot 4 + (2+2) = 20 \end{aligned}$$

12.

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 1} = 4$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 1}$ **(1)** κοντά στο $x_0 = 1$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ και $f(x)(x-1) = x^2 - \alpha x + \beta \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - \alpha x + \beta) \Rightarrow$$

$$4 \cdot 0 = 1^2 - \alpha \cdot 1 + \beta \Rightarrow$$

$$0 = 1 - \alpha + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - 1 \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \alpha - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1) - \alpha(x-1)}{x-1} = x + 1 - \alpha$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 - \alpha = 2 - \alpha$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

$$\text{Επομένως } 4 = 2 - \alpha \Rightarrow \alpha = -2 \quad \text{και η (2)} \Rightarrow \beta = -3.$$

13.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+\alpha}-2}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε τους α, ℓ .

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x+\alpha}-2}{x-1}$ **(1)** κοντά στο $x_0 = 1$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell$ και $f(x)(x-1) = \sqrt{x+\alpha}-2 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+\alpha}-2) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = \sqrt{1+\alpha}-2 \Rightarrow$$

$$\ell \cdot 0 = \sqrt{1+\alpha}-2 \Rightarrow$$

$$2 = \sqrt{1+\alpha} \Rightarrow \alpha + 1 = 4 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{4}$$

14.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) = f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + x^2 + x] = 4$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$ και $f(x) = g(x) - x^2 - x$

$$f(1-x) = g(1-x) - (1-x)^2 - (1-x)$$

αλλά $f(1-x) = f(x)$, άρα $f(x) = g(1-x) - (1-2x+x^2) - 1+x$

$$f(x) = g(1-x) - 1 + 2x - x^2 - 1 + x$$

$$f(x) = g(1-x) - 2 + 3x - x^2 \quad (1)$$

Στο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$, όπου x θέτουμε $1-u$, τότε

$u \rightarrow 0$ και $\lim_{u \rightarrow 0} g(1-u) = 4$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(1-x) = 4$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} [g(1-x) - 2 + 3x - x^2] = 4 - 2 + 3 \cdot 0 - 0^2 = 2$

(1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [g(1-x) - 2 + 3x - x^2] = 2$

15.

Για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow 2} [f^2(x) + f(x) + x^2 - x] = \frac{7}{4}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) + \frac{1}{2} \right] = 0$.

Προτεινόμενη λύση

1^{ος} τρόπος

Θέτουμε $g(x) = f^2(x) + f(x) + x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$f^2(x) + f(x) = g(x) - x^2 + x \quad (1)$$

$$\text{και η υπόθεση γίνεται } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{7}{4} \quad (2)$$

Θέτουμε $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Θα αποδείξουμε ότι } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0)$

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad h^2(x) &= \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 \\ &= f^2(x) + 2 \cdot \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4} \\ &= f^2(x) + f(x) + \frac{1}{4} \\ &\stackrel{(1)}{=} g(x) - x^2 + x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο
για να συνδυαστούμε με
την υπόθεση

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 2} h^2(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) - \lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 - x - \frac{1}{4} \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{7}{4} - \left(2^2 - 2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \left(4 - 2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} f^2(x) + f(x) + x^2 - x &= f^2(x) + 2 \cdot \frac{1}{2} f(x) + x^2 - x \\ &= f^2(x) + 2 \cdot \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x^2 - x \\ &= \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 + x^2 - x - \frac{1}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε
το αποδεικτέο

$$\begin{aligned} \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 &= [f^2(x) + f(x) + x^2 - x] - \left(x^2 - x - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 &= \lim_{x \rightarrow 2} [f^2(x) + f(x) + x^2 - x] - \lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 - x - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \left(2^2 - 2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \left(4 - 2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) + \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$